Partie B.

On désigne par f une application numérique définie, continue et dérivable en tout point de $\mathbb{R}$. On suppose que $f(0) = 0$.

On appelle g et h les applications numériques définies à partir de f par les expressions :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{x}{1+|f(x)|} \quad ; \quad h(x) = \frac{f(x)}{1+|x|}$$

1°) Montrer que les applications g et h sont dérivables au point 0.

2°) On pose dans cette question $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

a) Etudier la parité des applications f, g et h. Donner les conséquences sur l'étude de ces applications.

b) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, le signe de $g'(x)$ est le même que celui de $1+f(x)-xf'(x)$, et le signe de $h'(x)$ est le même que celui de $(1+x)f'(x)-f(x)$.

Etudier les variations des applications f, g et h.

Partie C.

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. On se propose de montrer dans cette question que $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\, dx = f(1)$.

1°) a) Si C est une fonction constante valant k sur $[0,1]$, vérifier que :

$$\lim_{n\to+\infty} (n+1) \int_0^1 x^n C(x)\, dx = C(1) = k$$

En déduire qu'on a l'équivalence :

$$\lim_{n\to+\infty} (n+1) \int_0^1 x^n f(x)\, dx = f(1) \iff \lim_{n\to+\infty} (n+1) \int_0^1 x^n (f(x)-f(1))\, dx = 0$$

b) On suppose que f est de classe C^1 sur $[0, 1]$. Montrer que :

$$(n+1) \int_0^1 x^n f(x)\, dx = f(1) - \int_0^1 x^{n+1} f'(x)\, dx.$$

En déduire, que:

$\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)\displaystyle\int_0^1 x^n . f(x). dx = f(1)$

❶ On notera E, l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

Si f appartient à E on note Φ l'application de $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{R}$ ainsi définie:

$\Phi(x)=\int_x^{x+1} f(x)\,dx$.

On notera L, l'application de E dans E telle que $L(f)=\Phi$.

1/ Déterminer Φ dans chacun des cas ci-dessous

a/ a étant un réel: $f(x)=\cos(ax)$. Que se passe-t-il si $a=2\pi$, si $a=4\pi$, si $a=0$?

b/ $f(x)=\begin{cases} 0, \text{ si } x \notin [0,1] \\ 4x, \text{ si } x \in [0,\frac{1}{2}] \\ 4(1-x), \text{ si } x \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$

c/ $f(x)=\begin{cases} 1-x, \text{ si } x \leqslant 1 \\ \ln(x), \text{ si } x>1 \end{cases}$

2/ On étudie maintenant quelques propriétés de l'application L.

a/ Montrer que Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

b/ L est-elle surjective?

c/ L est-elle injective?

d/ Montrer que si f est bornée, il en est de même de L(f)

e/ Montrer que si f est périodique, alors L(f) est périodique avec la même période.

3 / Si $f\in E$, et si a est un réel on définit une fonction g par: $g(x)=f(a-x)$.

Trouver une relation entre L(f) et L(g) (on pourra utiliser un changement de variable).

En déduire une propriété de symétrie pour la courbe d'équation $y=\Phi(x)$, lorsque:

f est paire

f est impaire.

4/ Si f tend vers l quand x tend vers $+\infty$, montrer que L(f) a la même limite.

A l'aide d'un contre-exemple, montrer que la réciproque est fausse.

❷

Partie A.

1°) a) Etudier sur l'intervalle $[0,\pi/2]$ les variations de l'application

$$\varphi : t \mapsto \varphi(t) = \cos t(1+\sin t) - 1$$

(ne pas construire la courbe représentative).

b) Montrer que l'équation $\varphi(t)=0$ possède une solution et une seule $t_0 \in]0,\pi/2[$.

Montrer que $\frac{\pi}{4} < t_0 < \frac{\pi}{3}$.

2°) On considère l'équation : $\sqrt{1+x^2} = x^2 - x + 1$. A l'aide du changement d'inconnue $x=\tan t$, déduire du **1)** que cette équation admet une solution et une seule x_0 dans l'intervalle $]0,+\infty[$. Donner un encadrement de x_0.